PART2 命題と証明

要点 ① 対偶を利用する証明

命題 $p \Rightarrow q$ を証明するとき，その対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が真であることを示すことで，もとの命題が真である，と証明することができる。

例 n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明する。

この命題の対偶は「　が　　ならば，　は　　である」。これを示す。

n が奇数のとき，n は整数 k を用いて

$n=$

と表される。このとき

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=$

$2k^2+2k$ は　　であるから，n^2 は奇数である。

よって，　　　　　　　　　　である。

要点 ② 背理法による証明

「背理法」… ある命題を証明するとき，その命題が　　　　　　すると，　　が生じることを示し，それによってもとの命題が成り立つことを証明する方法。

例 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+1$ が無理数であることを証明する。

$\sqrt{2}+1$ が　　　　　　と仮定すると，$\sqrt{2}+1$ は　　　　であるから，

$\sqrt{2}+1=r$（r は　　　　）

とおくと

$\sqrt{2}=r-1$

r は　　　　より，$r-1$ も　　　　である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに　　する。

したがって，$\sqrt{2}+1$ は無理数である。

[MEMO]

2 (1) n を整数とする。n^2 が 3 の倍数でないならば，n は 3 の倍数ではないことを証明せよ。

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$1-2\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

Point Pickup

対偶を利用する証明

命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽が一致することを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

背理法

証明する命題が成り立たないと仮定し，その仮定のもとで矛盾を導くことで，立てた仮定が間違っている，よってもとの命題が成り立つ，とする証明方法。

第 6 講　PART2 確認問題

1 n を整数とする。n^2 が奇数ならば，n は奇数であることを証明せよ。

〔証明〕

与えられた命題の対偶は，

n が [ア] ならば，n^2 は [イ] である

これを証明する。

n が [ア] のとき，n は整数 k を用いて

$n=$ [ウ] と表される。このとき，

$n^2=$ [エ]

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は [オ] である。

対偶が真であるから，もとの命題も真である。

[[ア], [イ], [オ] の選択肢]

① 偶数　　② 奇数

[[ウ], [エ] の選択肢]

① $2k$　　② $2k+1$

③ $2\cdot 2k^2$　　④ $2(2k^2+2k)+1$

2 $\sqrt{2}$ が無理数であることを利用して，$3\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

〔証明〕

$3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$3\sqrt{2}$ は カ である

から，カ である r を用いて，

$$3\sqrt{2}=r$$

とおくと，

$$\sqrt{2}=\boxed{\text{キ}}$$

r が有理数であるから，キ も有理数であり，

$\sqrt{2}$ が ク であることに矛盾する。

したがって，$3\sqrt{2}$ は無理数である。

[カ，ク の選択肢]

① 有理数　　② 無理数

[キ の選択肢]

① $3r$　　② $r-3$　　③ $\frac{r}{3}$

【MEMO】

PART2 命題と証明

2 (1) n を整数とする。n^2 が 3 の倍数でないならば, n は 3 の倍数ではないことを証明せよ。

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$1-2\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

[解答]

(1) 与えられた命題の対偶は

「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」

である。これを証明する。

n が 3 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=3k$$

と表される。このとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot3k^2$$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(2) $1-2\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$1-2\sqrt{3}$ は有理数であるから，

有理数 r を用いて

$$1-2\sqrt{3}=r$$

とおくと

$$\sqrt{3}=\frac{1-r}{2}$$

r は有理数より，$\frac{1-r}{2}$ も有理数であり，$\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$1-2\sqrt{3}$ は無理数である。

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：①，ウ：①，エ：③，オ：①

[解説]

与えられた命題の対偶は，**[A]**

n が**偶数**ならば，n^2 は**偶数**である

これを証明する。

n が偶数のとき，n は整数 k を用いて $n = \mathbf{2k}$ と表される。このとき，

$$n^2 = 4k^2 = \mathbf{2 \cdot 2k^2}$$

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は**偶数**である。

対偶が真であるから，もとの命題も真である。

[A]　対偶を利用する証明
命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽が一致することを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

2

[正解] カ：①，キ：③，ク：②

[解説]

$3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，**[B]**

$3\sqrt{2}$ は**有理数**であるから，有理数である r を用いて，

$$3\sqrt{2} = r$$

とおくと，

$$\sqrt{2} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{3}}$$

r が有理数であるから，$\dfrac{r}{3}$ も有理数であり，

$\sqrt{2}$ が**無理数**であることに矛盾する。

したがって，$3\sqrt{2}$ は無理数である。

[B]　背理法
証明する命題が成り立たないと仮定し，その仮定のもとで矛盾を導くことで，立てた仮定が間違っている，よってもとの命題が成り立つ，とする証明方法。